

ЛШ олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии
МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР
Таллинн, 2 декабря 2005 года
XI класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.

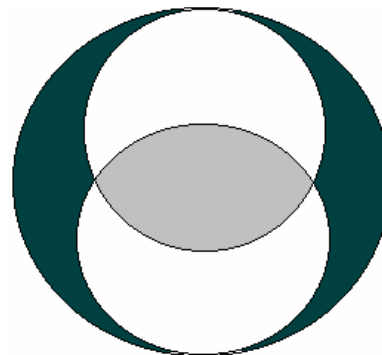
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Реши систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37 \\ x^2 + z^2 + xz = 28 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}.$$

2. Два брата шотландца решили заниматься разведением овец. Для этого они продали общее стадо коров. На полученные от продажи коров деньги они купили овец и поделили их между собой. За каждую корову они получили столько золотых монет, сколько было первоначально коров в стаде, а стоимость каждой овцы составила 10 золотых монет. В конце у братьев осталась сумма, меньшая, чем 10 золотых монет, которой точно хватило на покупку молодого барана. В итоге было куплено чётное количество животных и делёж упростился. Шотландец, который получил молодого барана, очевидно, должен был получить от брата определённую сумму денег в качестве компенсации. Каков размер суммы, которую он должен был получить?

3. Доказать, что $\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}.$

4. Изображённые на рисунке две маленькие окружности с равными радиусами проходят через центры друг друга и касаются большой окружности изнутри. Найди разность между площадями тёмно закрашенной части и светло закрашенной части фигуры, если центры всех трёх окружностей лежат на одной прямой и радиус большой окружности равен 1.



Замечание. Часть фигуры не закрашена вообще.

5. Каждый человек, присутствующий на вечере знакомств, заранее знаком точно с тремя людьми из числа присутствующих. Найди все такие числа N , которые могут выражать количество всех присутствующих на вечере.